# 1.Введение

Сила притяжения между телами, обладающих массой, является основополагающей силой взаимодействия в космосе. Именно под влиянием этой силы Вселенная на больших масштабах приобретает свою структуру: внутреннее строение галактик, их скопления и сверхскопления. Также и на более меньших масштабах гравитация остается чуть ли не важнейшем фактором развития космических систем.

Известно, что около половины звёздных систем в нашей галактике – двойные, то есть состоят из двух массивных тел с более меньшими телами на их орбитах. В таком случае (и учитывая, что две звезды примерно равны массе Солнца) в системе присутствуют уже два главных источников силы тяжести, которые, как и полагается, взаимодействуют между собой. Этот факт, в свою очередь, порождает множество интересных гипотез.

В своём прошлом исследовании о благоприятных условиях для возникновения жизни на экзопланетах, я упоминал лишь внутренние факторы экзопланеты, влияющие на климат, не рассматривая при этом факторы звёздной системы. Естественно, что, изучая подобные распространённые явления, как климат экзопланет, нельзя обойти стороной случай, когда в системе находится более одного светила. Для продолжения исследования необходимо понять принцип движения двух звёзд в системе.

**Гипотеза:** при наличии подробной модели движения двух тел я смогу продолжить исследование климата и эволюции экзопланет, расширив его для кратных систем.

**Цель проекта:** изучить механизм движения двух тел в гравитационном поле и построить динамичную компьютерную модель этой системы.

**Задачи:**

1. Сформулировать задачу, изобразить её условия графически.
2. Получить выражения необходимые для вычисления постоянных величин системы, используя формализм Лагранжа.
3. Определить функциональную зависимость координат системы от времени.
4. На основе полученных выражений и зависимостей построить модель, демонстрирующую механизм движения двух тел под действием гравитационной силы.

# 2.Теоретическая часть

**2.1. Формулировка задачи**

Рассмотрим трёхмерную систему координат (x, y, z), и две материальные точки с массами и . Проведём к каждому из тел радиусы векторы и соответственно, а также вектор , направленный от к и вектор – радиус-вектор центра масс (рис. 1).

Векторы и определяются выражениями:

Решая систему относительно и , получаем уравнения для двух векторов:

Удобно расположить начало координат в центре инерции системы, записав уравнения радиусов векторов в виде:

Движение двух тел относительно друг друга происходит в одной плоскости, *перпендикулярной вектору момента импульса системы* [2, с. 90](рис. 2), как мы сможем увидеть позднее*.* Задача: определить положение каждого тела в любой момент времени.

**2.2. Функция Лагранжа системы**

Функция Лагранжа системы двух тел, определяющая её состояние в момент времени *t* [1, с. 46]:

Учитывая, что .

**2.3. Постоянные величины системы**

Постоянные или *сохраняющиеся* величины системы – параметры, не изменяющиеся со временем.

Обобщенная энергия системы определяется в теоретической механике как [1, с. 24]:

Полная энергия сохраняется, так как функция Лагранжа (а значит состояние системы) не зависит явно от времени или, выражаясь точнее,

Учитывая, что , получаем:

Обобщенный момент импульса системы (учитывая, что [1, с. 30]:

Сохранение момента импульса связано с тем, что система обладает *изотропией пространства.*

**2.4. Функциональная зависимость координат от времени**

В разделе 2.1 упоминалось, что движение двух тел происходит в одной плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса. В этой плоскости вводятся полярные координаты: расстояние *r* и угол . Их изменения со временем характеризуют следующие интегралы [1, с. 47]:

**Зависимость от для движения в центральном поле:**

Зависимость угла поворота от изменения вектора *r* определяет траекторию движения тела и даётся следующим выражением:

Введя замену

Выполним простое интегрирование:

Перепишем зависимость как *уравнение конического сечения*:

Где e – эксцентриситет орбиты, а p – параметр, равные соответственно:

Для эллиптической орбиты эксцентриситет соответствует:

И, соответственно, полная механическая энергия .

**Зависимость от для движения в центральном поле:**

Зависимость длины вектора *r* от времени *t* дается интегральным выражением:

Выполним преобразования, учитывая, что орбита эллиптическая ():

Учитывая, что для эллиптической орбиты справедливо [1, с. 52]:

Где, *а – большая полуось эллипса.* Подставляя в интегральное выражение, получим:

С помощью подстановки [1, с. 54]:

Запишем интеграл в виде:

Таким образом, при помощи введения параметра и разделив переменные, окончательно запишем неявную зависимость r(t):

Где - *эксцентрическая аномалия* (рис.2*)*. Зависимость :

**2.5. Зависимость эксцентриситета от скорости e(v), первичные параметры моделируемой системы**

В ходе исследования была выявлена непредвиденная проблема – неопределённость начальных скоростей тел. Исходя из функции Лагранжа видно, что она содержит в себе начальные положения и начальные скорости тел. Начальное положение тела определяется либо как его радиус-вектор , либо более явно, как начальное расстояние между телами . Однако начальные скорости тел (а тем более их вектор) определить не так легко. Для того чтобы выяснить, *выбор каких скоростей* физически обоснован, необходимо получить зависимость *e(v),* её можно выразить из

* – положения тел относительно центра масс
* – угол между и

Приняв, что

Графиком данной зависимости при таких коэффициентах является крупная парабола с двумя экстремумами, её маломасштабная часть (рис. 3) показывает, что эксцентриситет меняется слабо относительно величины модуля скорости. Значение эксцентриситета отвечает за вид орбиты:

Учитывая приведенную выше зависимость и значение эксцентриситета для эллиптической орбиты, получаем что тела могут иметь скорости в интервале:

Значению *e* = 0.52 соответствует скорость 3515 м/с или ~3.5 км/с.

## **3. Практическая часть**

**3.1. Основные положения**

Для моделирования движения двух тел я буду использовать язык программирования python, модуль NumPy для научных расчётов и хранения данных и модуль matplotlib для визуализации данных.

Движение тел будет происходить в плоскости *x, y* [2, с. 90]*,* а координатами, характеризующими положения тел, являются вектор , соединяющий их и угол его поворота относительно перицентра . Тогда уравнение траектории запишется в простом виде:

Где изменяется монотонно (, [1, с. 47]).

**3.2 Вычисление констант системы**

Создадим в программном файле блок переменных, в которые запишем физические константы, необходимые для дальнейших вычислений (гравитационная постоянная G, величина солнечной массы в кг, 1 астрономическая единица в метрах):

# Constants

G = 6.67 \* power(10, -11) # Н / м2 \* кг2

solar\_mass = 2 \* power(10, 30) # кг

a\_u = 149597870700 # м

Далее, запишем значения, характеризующие систему (массы, скорости и положения тел):

# Variables

m1 = 1.0788 \* solar\_mass # кг

m2 = 0.9092 \* solar\_mass # кг

m = (m1\*m2)/(m1+m2)

v1 = v2 = 3515 # м/с

alfa = 45

r\_R = 17.8 \* a\_u # м

r0 = 35.6 \* a\_u # м

Затем, вычислим первые постоянные системы (полная механическая энергия, момент импульса, период обращения каждого тела, эксцентриситет, фокальный параметр):

E = ((m1\*power(v1, 2) + m2\*power(v2,2)) / 2) + (-G\*m1\*m2/r0) # кг\*м^2 / с^2

M = (r\_R \* (m1 \* v1) \* sin(alfa)) + (r\_R \* (m2 \* v2) \* sin(alfa)) # кг\*м^2 / с

period = (2 \* np.pi \* sqrt(power(r\_R, 3)/(G\*(m1 + m2))))

e = sqrt( (2\*E\*power(M, 2)) / (m \* power(-G\*m1\*m2, 2)) + 1 )

p = (power(M, 2)) / (m \* (G\*m1\*m2))

**3.3 Построение системы:**

Используя библиотеку matplotlib, отобразим двумерную систему координат с вектором :

r\_0 = [17.8, 0]

r\_1 = [-17.8, 0]

origin = [0, 0]

fig, ax = plt.subplots()

ax.set\_xlim(-25, 25)

ax.set\_ylim(-25, 25)

ax.quiver(origin[0], origin[1], r\_0[0], r\_0[1], angles='xy', scale\_units='xy', scale=1, color="b")

ax.quiver(origin[0], origin[1], r\_1[0], r\_1[1], angles='xy', scale\_units='xy', scale=1, color="r")

Вектор в программе состоит из двух отдельных векторов, угол наклона векторов будет выражаться через их проекции.

1. **Заключение**

**4.1. Общие выводы**

В ходе разработки проекта был исследован закон движения двух тел в гравитационном поле и построена первая версия компьютерной модели. Была также решена возникшая проблема возможных скоростей частиц системы введением математической модели, описывающей зависимость эксцентриситета орбиты от скорости.

* 1. **Дальнейшие исследования**

1. Адаптировать полученную модель для систем, частицы в которой имеют большую разницу в массе.
2. Подробнее изучить геометрию орбит для графического отображения их на модели.
3. Использовать полученную модель для изучения влияния двух звёзд в системе на климат экзопланеты.

## **5. Список использованных источников**

1. *Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика в 10 томах, том 1 – Механика / Издательство “Наука”, Москва, 1988.*
2. *Рой А. Движение по орбитам / Издательство “Мир”, Москва, 1981*
3. *С. А. Хайбрахманов. Основы научных расчётов на языке программирования python / Издательство Челябинского государственного университета, Челябинск, 2019*
4. *Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden. Foundations of Mechanics, second edition / American Mathematical Society, Rhode Island, 2008.*
5. *David Betounes. Differential Equations / Springer, 2001.*
6. *Форш Павел Анатольевич. Серия лекций МГУ “Теоретическая механика” / Москва, 2019.*
7. *Bradley W. Carroll Dale A. Ostlie*. *An Introduction to Modern Astrophysics / Pearson Education Limited. Edinburgh Gate, 2014*